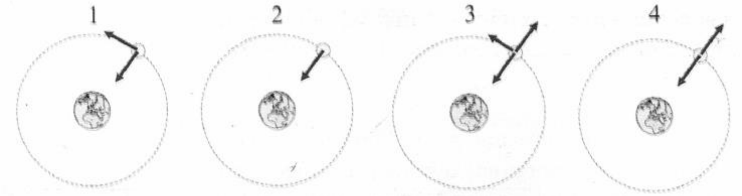
## Boletín de Actividades (VII)
## ASTRONOMÍA

$(Datos: m_{Tierra} = 5.96 \cdot 10^{24}\ kg;\ R_{Tierra} = 6\ 370\ km)$

1. Los dibujos representan las fuerzas que actúan sobre la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra. Indica cuál de ellos es el correcto y comenta por qué son inadecuados los demás.




2. ¿Qué diferencia hay entre un sistema heliocéntrico y un sistema geocéntrico? Explica brevemente los principales hitos del cambio de la concepción geocéntrica a la concepción heliocéntrica.

3. Determina la altura máxima del Sol al mediodía del 21 de Diciembre en una ciudad cuya latitud es 34º 25´ N, indicando hacia qué horizonte hay que mirar.

4. Determina la altura máxima del Sol al mediodía del 21 de Junio en una ciudad cuya latitud es 15º 10´ N, indicando hacia qué horizonte hay que mirar.

5. Un determinado planeta posee una luna situada a 410 000 km de su centro que emplea 45 días en dar una vuelta a su alrededor. ¿A qué altura (desde el centro del planeta) habría que situar un satélite artificial sobre ese planeta para que su periodo fuese de 2 días?

6. La Tierra tarda 365.25 días en dar una vuelta alrededor del Sol, con un radio de giro medio de 149.6 millones de km (1 UA). Mercurio se encuentra a una distancia de 0.387 UA. ¿Cuántos días tiene un año mercuriano? Calcula la velocidad orbital de cada planeta.

7. Un satélite geoestacionario debe tener un período de rotación igual al de la Tierra de modo que se encuentre sobre la misma vertical. Calcula la distancia al centro de la Tierra para que esto pueda ocurrir así como la velocidad lineal de traslación.

8. Un satélite orbita a una distancia de 1000 km sobre la superficie terrestre. Calcula la velocidad de éste y el tiempo que tarda en dar una vuelta a la Tierra.

9. ¿A qué distancia deberían estar dos cuerpos de 1 y 4 toneladas para que se atrajeran con una fuerza de $4 \cdot 10^{-6}$ N?

10. Un satélite de 300 kg orbita alrededor de la Tierra a 500 km de altura. Se pide: (a) dibuja y calcula la fuerza que le mantiene en órbita; (b) el valor de la gravedad en esa órbita (utiliza únicamente como datos el valor de la gravedad en la superficie terrestre y el valor del radio de la Tierra); (c) la velocidad del satélite; (d) la aceleración centrípeta al que se encuentra sometido.

11. Un astronauta llega a un determinado planeta y observa que su peso allí es de 250 N, mientras que en la Tierra era de 200 N. Si lanza una piedra verticalmente y hacia arriba en ese planeta con una rapidez de 12 m/s, ¿qué tiempo empleará la piedra en llegar de nuevo al suelo? Si sabemos que la masa de ese planeta es similar a la de la Tierra, ¿cuál será el volumen de ese planeta?

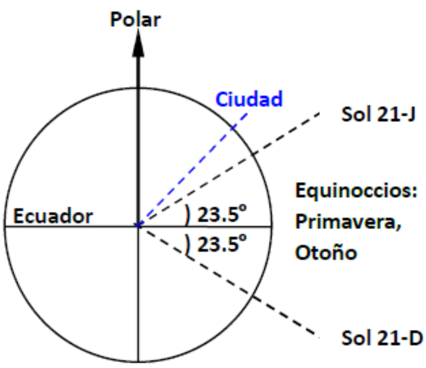
12. Un satélite está en una órbita ecuatorial circular hacia el este, a una altura de 35 928 km en órbita circular. Se pide:
    (a) La velocidad a la que se mueve.
    (b) Tiempo que tarda en dar una vuelta. ¿Cómo se vería este satélite desde la Tierra?

13. ¿A qué altura estaba un astronauta sobre la superficie de la Tierra, si cuando regresó a ésta su peso se triplicó (sin variar su masa)?

1. Para que la Luna gire alrededor de la Tierra se necesita una fuerza que haga variar la dirección de la velocidad. Esa fuerza tiene su origen en la atracción de la Tierra sobre la Luna, así que esa es la única fuerza que actúa sobre la Luna. Por lo tanto, el dibujo 2 es el correcto.
Los otros dibujos son inadecuados porque en ellos se representan fuerzas cuyo origen no puede justificarse ¿qué cuerpos hacen las fuerzas en las direcciones tangentes o radial hacia fuera? No existen esos cuerpos por lo que no existen esas fuerzas.

2. La principal diferencia entre el sistema heliocéntrico y el geocéntrico es que el primero coloca al Sol en el centro mientras que el segundo coloca a la Tierra como centro respecto al que giran los demás astros.
Respecto a los hitos más importantes en el cambio de una concepción por otra debemos mencionar a Copérnico, que explicó el movimiento de los astros considerando que éstos giraban alrededor del Sol. Kepler que puso de manifiesto que las órbitas eran elípticas y no circulares, lo que contradecía uno de los principios tradicionales de la distinción entre el mundo celeste y el terrestre. Y Galileo que jugó un papel importantísimo en la aceptación del modelo heliocéntrico, atacando la idea de perfección del mundo celeste, utilizando el telescopio, y defendiendo el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, lo que le ocasionó la conocida controversia con la Iglesia.

3. La situación se puede representar en el siguiente esquema:




Así, en esa ciudad, el 21 de Diciembre a mediodía nunca tendremos el Sol en lo alto de nuestras cabezas ya que al Sol le faltan:

$$90° - H = 34° \, 25' + 23° \, 30 = 57° \, 55'$$

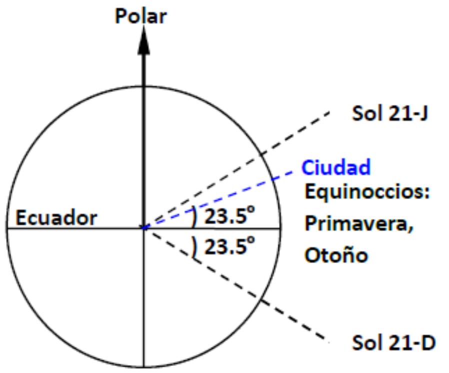
para conseguirlo.

Por tanto, si le faltan 57º 55´ para estar sobre nuestras cabezas, la altura que tendrá el Sol sobre el horizonte al mediodía del solsticio de verano será:

$$H = 90° - 57° \, 55' = 32° \, 5'$$

Así pues, mirando hacia el SUR, y elevando nuestros ojos a 32º 5´ encontraremos al Sol, en su posición más baja (al mediodía) en todo un año.

4. La situación se puede representar en el siguiente esquema:




Así, en esa ciudad, el 21 de Junio a mediodía nunca tendremos el Sol en lo alto de nuestras cabezas ya que al Sol le faltan:

$$90° - H = 23° \, 30' - 15° \, 10 = 8° \, 20'$$

para conseguirlo.

Por tanto, si le faltan 8º 29´ para estar sobre nuestras cabezas, la altura que tendrá el Sol sobre el horizonte al mediodía del solsticio de verano será:

$$H = 90° - 8° \, 20' = 81° \, 40'$$

Así pues, mirando hacia el NORTE, y elevando nuestros ojos a 81º 40´ encontraremos al Sol, en su posición más alta en todo un año.

5. Aplicando la tercera ley de Kepler, con los datos que se indican:

$$Luna \begin{cases} T_1 = 45 \text{ días} \\ R_1 = 410\,000 \text{ km} \end{cases} \qquad Satélite \begin{cases} T_2 = 2 \text{ días} \\ R_2 = ? \end{cases}$$

$$\frac{T_1^{\,2}}{R_1^{\,3}} = \frac{T_2^{\,2}}{R_2^{\,3}}; \; R_2 = \sqrt[3]{\frac{R_1^{\,3} \cdot T_2^{\,2}}{T_1^{\,2}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{410000^3 \cdot 2^2}{45^2}} = 51\,443.3 \; km$$

6. Aplicando la tercera ley de Kepler, con los datos que se indican, podemos determinar el periodo de mercurio,; es decir, el tiempo que tarda Mercurio en dar una vuelta alrededor del Sol:

$$Tierra \begin{cases} T_1 = 365 \text{ días} \\ R_1 = 1 \; UA \end{cases} \qquad Mercurio \begin{cases} T_2 = ? \\ R_2 = \; 0.387 \; UA \end{cases}$$

$$\frac{T_1^{\,2}}{R_1^{\,3}} = \frac{T_2^{\,2}}{R_2^{\,3}}; \; T_2 = \sqrt{\frac{R_2^{\,3} \cdot T_1^{\,2}}{R_1^{\,3}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0.387^3 \cdot 365^2}{1^2}} = 87.9 \text{ días}$$

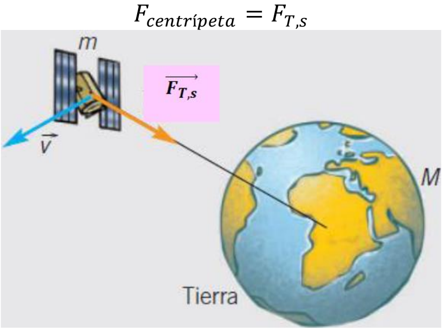
Para conocer la rapidez con la que se mueve cada planeta alrededor del Sol:

$$v_{Tierra} = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_1}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 149.6 \cdot 10^6 km}{365.25\ días \cdot \frac{24\ h}{1\ día}} = 107\ 228\ km/h$$

$$v_{Mercurio} = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.387\ UA \cdot \frac{149.6 \cdot 10^6 km}{1\ UA}}{87.9\ días \cdot \frac{24\ h}{1\ día}} = 172\ 434\ km/h$$

7. La fuerza que hace girar al satélite (fuerza centrípeta) es originada por la atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre dicho satélite:

$$F_{centrípeta} = F_{T,s}$$




Así:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Que simplificando, nos queda:

$$v^2 = G \cdot \frac{M}{R} \qquad [1]$$

Para conocer R, debemos conocer la rapidez con la que se desplaza el satélite, pero la desconocemos. Sin embargo, como sabemos de cinemática:

$$v = \omega \cdot R = \frac{2\pi}{T} \cdot R$$

Si sustituimos en [1]:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R^2 = G \cdot \frac{M}{R}$$

Reordenando, nos queda:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} \qquad [2]$$

Puede observarse que el segundo miembro de la expresión [2] es constante para un determinado astro, obteniéndose la tercera ley de Kepler.

Si de [2] despejamos R:

$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.96 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4\pi^2}} = 42\ 203\ 320\ m \cong 42\ 203\ km$$

Ésa es la distancia al centro de la Tierra, a la que se debe encontrar el satélite.

Para determinar su velocidad de traslación, aplicamos [1]:

$$v^2 = G \cdot \frac{M}{R}; v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.96 \cdot 10^{24}}{42\ 203\ 320}} = 3\ 069 \frac{m}{s} = 11\ 048.8\ km/h$$

Otra forma sería:

$$v_{satélite} = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 42\ 203\ 320}{24\ h \cdot \frac{3\ 600\ s}{1\ h}} = 3\ 069\ m/s$$

8. La velocidad a la que orbita el satélite es:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.96 \cdot 10^{24}}{(6\ 370\ 000 +\ 1\ 000\ 000)}} = 7\ 344 \frac{m}{s}$$

El tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta será:

$$\Delta t = \frac{\Delta e}{v} = \frac{2\pi \cdot 7\ 370\ 000}{7\ 344} = 6\ 305\ s = 1\ h\ 45'\ 5''$$

9. Aplicando la ley de Coulomb:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}; R = \sqrt{\frac{G \cdot M \cdot m}{F}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-6}}} = 8.16\ m$$

10. (a) La situación es similar a la del ejercicio 7.

$$F_{T,s} = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.96 \cdot 10^{24} \cdot 300}{(6.87 \cdot 10^6)^2} = 2\ 526.9\ N$$

(b) Para conocer el valor de $g$ a esa distancia (utilizando sólo el valor de $g_0 = 9.81 \frac{m}{s^2}$ y $R_T = 6.37 \cdot 10^6 m$) debemos proceder como sigue:

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= G\frac{M}{{R_T}^2} \\ g &= G\frac{M}{R^2} \end{aligned}\right\} \textit{Dividimos ambas expresiones}:$$

$$\frac{g}{g_0} = \frac{{R_T}^2}{R^2}; g = g_0 \cdot \frac{{R_T}^2}{R^2} = 9.81 \cdot \frac{6370^2}{6870^2} = 8.43\frac{N}{kg}.$$

(c) A partir de los datos que tenemos, podemos conocer el valor de la rapidez del satélite así:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.96 \cdot 10^{24}}{6\,870\,000}} = 7\,607\frac{m}{s}$$

Otra forma de obtener el valor de $v$, sin utilizar $M$, sería:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por R:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R} \cdot \frac{R}{R}} = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R^2} \cdot R} = \sqrt{g \cdot R}$$

Puesto que: $g = G \cdot \frac{M}{R^2}$

Así: $v = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{8.43 \cdot 6870000} = 7610\, m/s$, que prácticamente coincide con el valor anterior.

(d) La fuerza que hace girar al satélite (fuerza centrípeta) es originada por la atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre dicho satélite:

$$F_{centrípeta} = F_{T,s}$$

Así:

$$m \cdot a_c = F_{T,s}$$

Por tanto:

$$a_c = \frac{F_{T,s}}{m} = \frac{2\,526.9\, N}{300\, kg} = 8.4\, m/s^2$$

11. Como el peso del astronauta en la Tierra es 200 N, podemos conocer su masa:

$$F_{T,a} = m \cdot g_T; m = \frac{200}{9.81} = 20.4\, kg$$

Con lo que la gravedad en ese planeta será:

$$F_{P,a} = m \cdot g_P; g_P = \frac{250}{20.4} = 12.25\, N/kg$$

Si ponemos el PR en el suelo, siendo positivo hacia arriba (y negativo hacia abajo), la ecuación de movimiento de la piedra será: $e = 12 \cdot t - 6.125 \cdot t^2$. Cuando la piedra llegue al suelo:

$$0 = 12 \cdot t - 6.125 \cdot t^2$$

Lo que ocurre al cabo de 1.96 s.

Para determinar el volumen del planeta, en primer lugar debemos conocer su radio:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}; R = \sqrt{\frac{GM}{g}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.96 \cdot 10^{24}}{12.25}} = 5\,696\,630\, m$$

Por tanto, su volumen será:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5\,696\,630^3 = 7.74 \cdot 10^{20}\, m^3$$

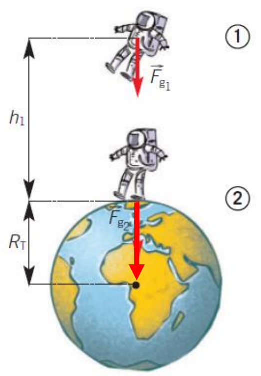
12. (a) La velocidad a la que se mueve el satélite es:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.96 \cdot 10^{24}}{4.2298 \cdot 10^7}} = 3\,066\frac{m}{s}$$

(b) $\Delta t = \frac{\Delta e}{v} = \frac{2\pi \cdot R}{v} = \frac{2\pi \cdot 42\,298\,000}{3\,066} = 86\,682\, s \cong 24\, horas$

Por consiguiente, el satélite tarda en dar una vuelta lo mismo que la tierra. Y puesto que los dos movimientos son hacia el este, quiere decir, que el satélite no se mueve con respecto a la superficie terrestre. Siempre lo veremos en el mismo sitio.

13. La situación se puede esquematizar así.




A partir del enunciado, se deduce que la fuerza que hace la Tierra sobre el astronauta en su superficie ② es tres veces mayor que en ①:

$$F_2 = 3 \cdot F_1$$

Es decir:

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{{R_T}^2} = 3 \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h_1)^2}$$

Simplificando:

$$\frac{(R_T + h_1)^2}{{R_T}^2} = 3$$

Si hacemos la raíz cuadrada a ambos miembros:

$$\frac{R_T + h_1}{R_T} = \sqrt{3}$$

Y despejando $h_1$:

$$h_1 = R_T \cdot (\sqrt{3} - 1) = 6\,370 \cdot (\sqrt{3} - 1) = 4\,663\, km$$

El astronauta se encuentra a 4 663 km sobre la superficie terrestre.