

CONJUNTOS

¿Qué es un conjunto?

Un conjunto es un grupo no ordenado de elementos que comparte una o más características.

Nomenclatura en los conjuntos

Los conjuntos siempre se nombran con letras mayúsculas, por ejemplo: A, B, C,...No obstante, existen una serie de conjuntos, debido a su importancia, tienen su propia letra como son $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$. Los elementos de un conjunto se nombran con letras minúsculas.

Además, en matemáticas tenemos una nomenclatura propia y una serie de símbolos que usamos en los conjuntos.

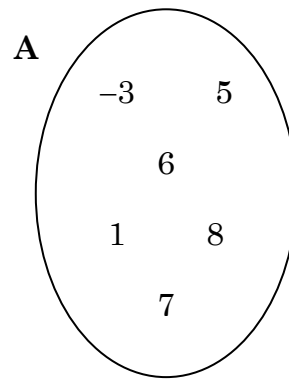
Símbolo	Significado
$\{ \}$	Listado de elementos del conjunto
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\nexists$	No existe
$\in$	Pertenece a
$\notin$	No pertenece a
$/$	Tal que
$\subset$	Está incluido
$\not\subset$	No está incluido
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\cup$	Unión de conjuntos
$\cap$	Intersección de conjuntos
$\vee$	O
$\wedge$	Y

¿Cómo se definen o representan los conjuntos?

Existen varias formas de definirlos o representar los conjuntos:

Diagrama de Venn

Es una forma muy intuitiva y simple de representarlos. Un diagrama de Venn es un diagrama que contiene a los elementos que forman parte del conjunto.



Ejemplo: Una heladería tiene los siguientes sabores de helado: fresa, nata, vainilla, turrón, chocolate, limón y stracciatella. Haz un diagrama de Venn para representar la situación.

Hemos llamado H al conjunto pues es una letra representativa de la palabra heladería.

Vemos como se han colocado los sabores de helado dentro del conjunto.

A simple vista se aprecia que dentro del conjunto H están los elementos fresa, nata, vainilla, turrón, chocolate, limón y stracciatella, es decir, dichos elementos pertenecen al conjunto H.



Cardinal de un conjunto

El cardinal de un conjunto es el número de elementos que pertenecen a dicho conjunto. Para representar el cardinal se usa la siguiente notación: $\text{card}(A)$ o $|A|$.

Ejemplo: Dado el conjunto H del ejemplo anterior, calcular el cardinal.

El cardinal del conjunto es 7, pues posee 7 elementos. Esto se expresa como:

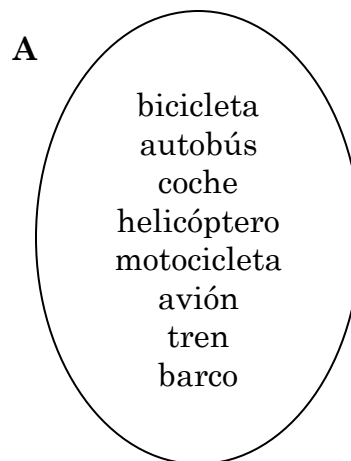
$$\text{card}(H) = 7 \text{ o } |H| = 7.$$

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. Un conjunto será finito cuando tiene un número limitado de elementos.

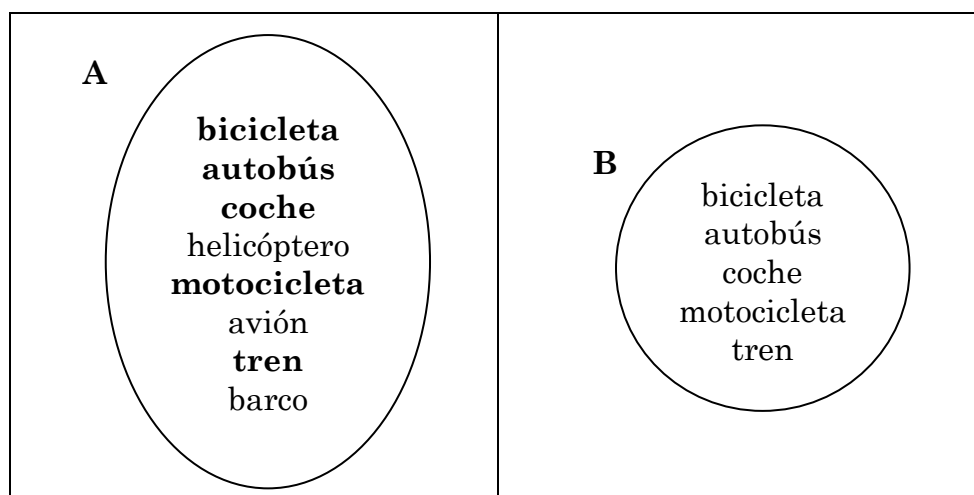
SUBCONJUNTOS

Se denomina subconjunto a un conjunto que está contenido dentro de otro. En matemáticas hay muchos ejemplos de subconjunto de números. Por ejemplo, los números naturales son un subconjunto de los números enteros. Los números enteros son un subconjunto de los racionales y estos, a su vez, de los reales.

Imaginemos que tengo un conjunto siguiente:



Vemos que es un conjunto de cardinalidad 8, es decir, un conjunto con 8 elementos. Los elementos comparten una cierta propiedad: son medios de transporte. Si nos fijamos un poco más nos daremos cuenta que hay elementos que tienen otra propiedad en común: tienen ruedas para transportar a los pasajeros. Así, podríamos crear un subconjunto B del conjunto A.



Vemos como todos los elementos de B que están contenidos en A, pero no todos los elementos de A están contenidos en B. Se dice pues que B es un subconjunto a A. Esto se representa como $B \subset A$. Eso se lee: "B está incluido en A" e indica que B es subconjunto de A.

Definición por extensión o enumeración del conjunto

En este caso, se enumeran todos los elementos que forman parte del conjunto. Para ello, se escribe el nombre del conjunto seguido de unas llaves que contienen los elementos de dicho conjunto. Como podemos ver en este ejemplo:

$$\underbrace{A}_{\text{nombre}} = \underbrace{\{-3, 1, 5, 6, 8, 7\}}_{\text{elementos}}$$

Cuando se está enumerando un conjunto que tiene infinitos elementos y que estos siguen algún patrón o regla, se usan los puntos suspensivos. Vemos el caso de los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Nota aclaratoria: Existe una diversidad de opiniones respecto a si el cero pertenece o no al conjunto de los números naturales. A veces se considera que el 0 es un número natural y otra vez no. Si lo piensas, los números naturales están hechos para contar, así que contar cero no tiene mucho sentido. Nosotros tomaremos el conjunto de los números naturales incluyendo al cero. En los libros podrás encontrar que se llama $\mathbb{N}^*$ al conjunto de los números naturales sin el cero o $\mathbb{N}_0$ al conjunto de los números naturales con el cero. Nosotros consideraremos que el cero es un número natural.

Definición por comprensión

Al definir un conjunto por comprensión buscamos una regla con la que obtener todos los elementos de dicho conjunto pero sin tener que nombrarlos a todos, como haríamos en la definición por extensión.

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \geq 8\}$$

Primero vamos a entender los símbolos que aparecen en la expresión:

- El símbolo $\in$ es la letra griega épsilon y se indica pertenencia de un conjunto. Se lee "pertenece a". Así $x \in \mathbb{N}$ se lee como "x pertenece al conjunto de los números naturales". Para indicar que un elemento no pertenece a un conjunto tenemos el símbolo $\notin$.
- El símbolo $/$, similar a la barra de división, significa condición. Se lee "tal que". Indica que se debe cumplir una cierta condición o característica.

Si lo leemos todo quedaría "el conjunto A está formado por los x perteneciendo a $\mathbb{N}$ tal que x son mayores que 8" e indica un conjunto de nombre A cuyos elementos son números naturales mayores que 8.

El mismo conjunto si lo definimos por extensión quedaría de la siguiente forma:

$$A = \{8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

Como habrás podido darte cuenta, la definición por comprensión es más corta de escribir y nos proporciona información (regla que siguen los números). El problema que tienes que no siempre es fácil obtener dicha regla.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Los conjuntos tienen operaciones. Veremos las dos más importantes:

- Unión
- Intersección

Unión de conjuntos

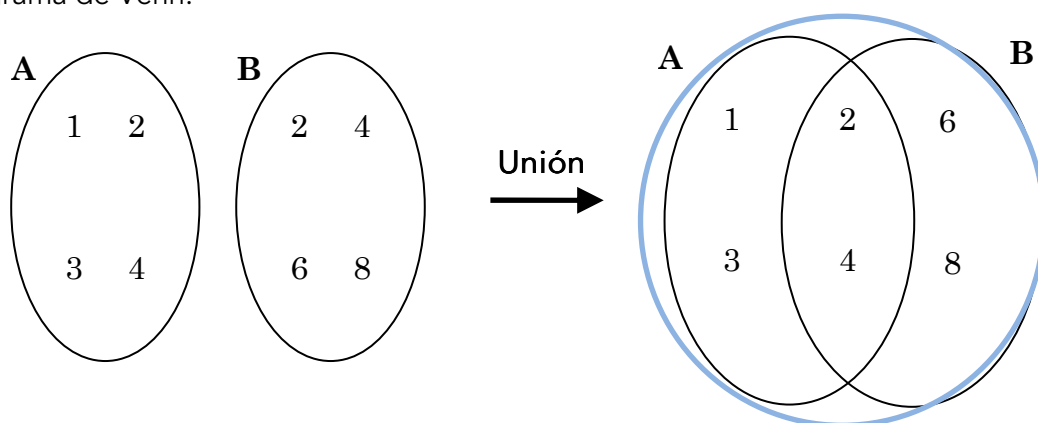
La unión de dos conjuntos es una operación que da como resultado otro conjunto, que llamaremos conjunto unión. Este está formado por todos aquellos elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos. Sean dos conjuntos A y B, el conjunto unión se representa como $A \cup B$.

Ejemplo: Dado los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$ obtener el conjunto unión.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

Se aprecia como los elementos 2 y 4 pertenece tanto al conjunto A como al B. No obstante, aparecen solamente una vez en el conjunto unión.

La unión de dos conjuntos también se puede realizar gráficamente mediante un diagrama de Venn.



Como se aprecia, se ha señalado con una línea azul la zona que representa a la unión de ambos conjuntos. Dicha línea azul no hay que dibujarla, la hemos puesto para señalar la zona en cuestión.

Intersección de conjuntos

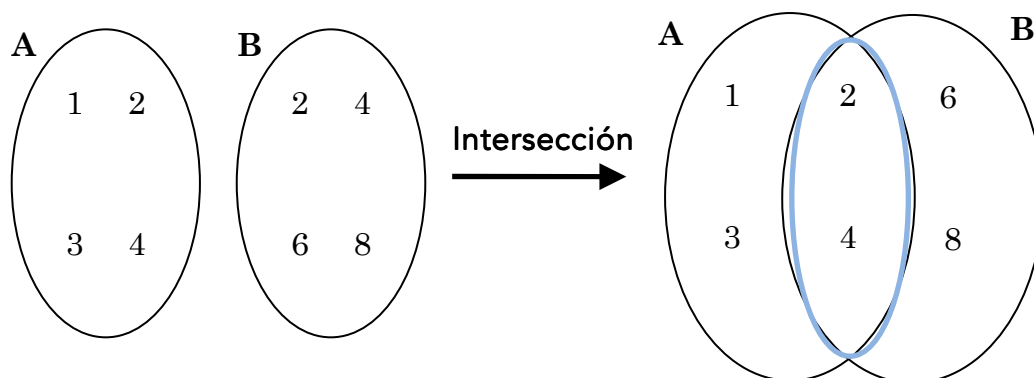
La intersección de dos conjuntos es una operación que da como resultado otro conjunto, que llamaremos conjunto intersección. Este está formado por todos aquellos elementos que pertenecen a ambos conjuntos, es decir, a los elementos comunes a ambos. Sean dos conjuntos A y B, el conjunto unión se representa como $A \cup B$.

Ejemplo: Dado $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$ obtener el conjunto intersección.

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

Se aprecia como los elementos 2 y 4 pertenecen tanto al conjunto A como al B. Solo estos elementos forman la intersección de los conjuntos.

La intersección de dos conjuntos también se puede realizar gráficamente mediante un diagrama de Venn.



Como se aprecia, se ha señalado con una línea azul la zona que representa a la intersección de ambos conjuntos. Dicha línea azul no hay que dibujarla, la hemos puesto para señalar la zona en cuestión.

INTERVALOS

Definición de intervalo

Se denomina intervalo de la recta real al conjunto de todos los números comprendidos entre dos números dados, llamados extremos de los intervalos.

Descripción de intervalo

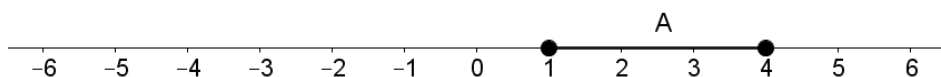
Los intervalos se nombran con letras mayúsculas. En los extremos del intervalo se colocan corchetes o paréntesis dependiendo de si el punto pertenece o no al intervalo.

Un intervalo puede ser de tres tipos:

- **Abierto.** Ninguno de los dos extremos pertenece al intervalo. Se expresa como $I = (a, b)$, o también, $I =]a, b[$.
- **Cerrado.** Ambos extremos pertenecen al intervalo. Se expresa como $I = [a, b]$.
- **Semiabierto o semicerrado.** Uno de los extremos pertenece al intervalo, pero el otro no. Se expresa como: $I = [a, b)$ o $I = [a, b[$ cuando se incluye el punto a , pero no el punto b . Si se incluye b , pero no a queda $I = (a, b]$ o $I =]a, b]$.

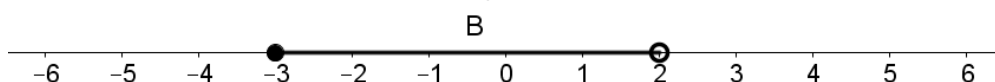
Los intervalos se representan gráficamente sobre la recta real. Para ello se colocan un punto relleno cuando el intervalo está cerrado en un extremo o un punto vacío cuando el intervalo está abierto en un extremo.

Por ejemplo, se puede representar el intervalo $A = [1, 4]$ de la siguiente forma:



Se aprecia como en los extremos se han colocado puntos rellenos, pues tanto el 1 como el 4 pertenecen al intervalo.

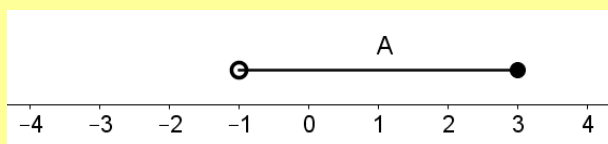
Si representamos el intervalo $B = [-3, 2)$ queda:



Vemos como en este caso, el punto -3 se dibuja con un punto relleno al pertenecer al intervalo, pero el punto 2 se representa con un punto vacío.

Ejemplo: Representar gráficamente el intervalo $A = (-1, 3]$.

Vemos que en -1 el punto está vacío, pues el intervalo está abierto en el -1. En cambio, al estar cerrado en 3, ponemos un punto relleno.

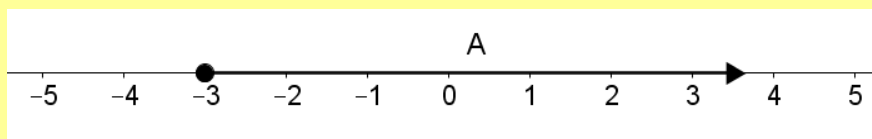


Semirrectas

Se denominan semirrecta a un intervalo de la recta real que tiene un extremo en infinito. Para representar una semirrecta tenemos un nuevo símbolo, una flecha. Esta

se usa para indicar que el intervalo continúa hasta el infinito, es decir, que no está limitado.

Ejemplo: Representar gráficamente el intervalo $A = [-3, \infty)$.



Fíjate que se ha colocado una flecha en el extremo derecho del intervalo.

Operaciones con intervalos

Al igual que ocurría con los conjuntos, con los intervalos se pueden realizar operaciones. Las operaciones más importantes son:

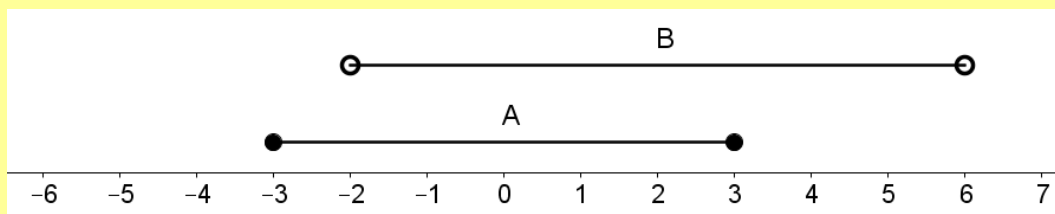
- Unión de intervalos.
- Intersección de intervalos.

Unión de intervalos

La unión de intervalos es una operación que da como resultado un nuevo intervalo. Dicho intervalo contendrá a todos los puntos que pertenezcan a alguno de los intervalos. La unión de intervalos se representa con el símbolo $\cup$. De manera más rigurosa se define la unión de intervalos como:

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo: Dados los intervalos $A = [-3, 3]$ y $B = (-2, 6)$. Calcula el intervalo unión:



La unión de ambos va desde -3 hasta 6, pues son los puntos que pertenecen a uno o al otro intervalo. Así, queda: $A \cup B = [-3, 6]$.

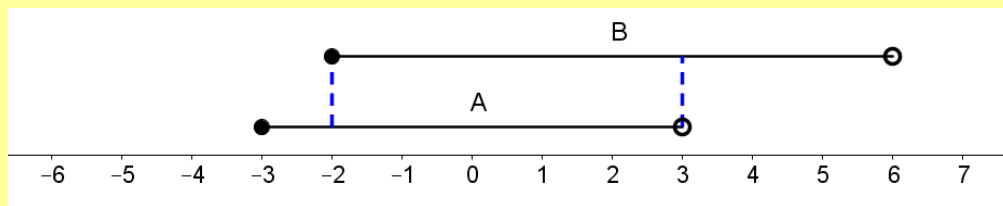
Intersección de intervalos

La intersección de intervalos es una operación que da como resultado un nuevo intervalo. Dicho intervalo contendrá a todos los puntos que pertenezcan a simultáneamente a ambos intervalos. La intersección de intervalos se representa con el símbolo $\cap$.

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \in B\}$$

Cuando dos intervalos no tienen ningún punto en común, se dice que da como resultado el intervalo vacío o conjunto vacío. Dicho conjunto se representa con el símbolo $\emptyset$.

Ejemplo: Dados los intervalos $A = [-3,3)$ y $B = [-2,6)$, represéntalos y calcula el intervalo intersección:



Hemos dibujado una línea azules discontinuas para ayudarnos a distinguir la intersección de ambos. La intersección va desde -2 hasta 3, quedando: $A \cap B = [-2,3)$.

Distancia entre dos puntos

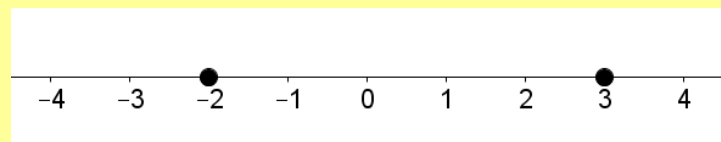
Se denomina distancia entre dos puntos a la longitud del segmento comprendido entre ambos puntos. La distancia entre dos puntos a y b se puede calcular como:

$$d(a,b) = |a-b|$$

Ejemplo: Calcular la distancia entre -2 y 3.

Para ellos tendremos que calcular la distancia: $d(-2,3) = |-2-3| = |-5| = 5$

Si los representamos gráficamente, vemos como entre -2 y 3 hay 5 unidades de distancia.



Entorno de un punto

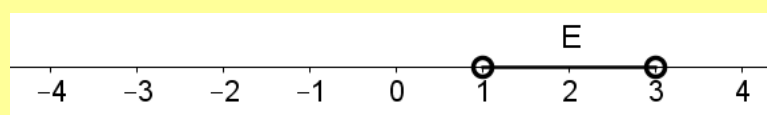
Se denomina entorno de un punto a un intervalo abierto centrado en el punto a y de radio r.

$$E(a,r) = \{x \in \mathbb{R} / d(a,x) < r\}$$

El entorno de un punto también se puede expresar usando intervalos. Esto es:

$$E(a,r) = (a-r, a+r)$$

Ejemplo: Representar el entorno $E(2,1)$



Vemos como el centro de intervalo está en el 2 y que a cada lado del 2 tiene 1 unidad de longitud. Si lo expresamos como un intervalo queda: $E = (2-1, 2+1) = (1,3)$.